



TITLE:

# 劣化するサーバーの保守政策(待ち行列理論とその周辺)

AUTHOR(S):

森, 雅夫; 畔柳主税

---

CITATION:

森, 雅夫 ...[et al]. 劣化するサーバーの保守政策(待ち行列理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1984, 519: 252-265

ISSUE DATE:

1984-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98421>

RIGHT:

## 劣化するサーバーの保守政策

東工大 工学部 森 雅夫(Masao MORI)

畔柳主税(Chikara AZEYANAGI)

1 はじめに

待ち行列システムのコントロールに関して、これまで Crabill [1], Lippman [7] などさまざまなタイプの研究がなされてきた。その典型的なモデルはM/M/1型待ち行列系列においてそのサービス率をコントロールするものである。つまり、行列長 $i$ の行列を保管するのに要する単位時間あたりのコストとサービス率 $\mu_k$ のサービスをするのに必要な単位あたりの稼働コストを考慮して、決定者は行列があまり大きくなるように、またサービスが必要以上に速くて高価なサービスを行なわないように、行列の長さ $i$ を観測しながらサービス率 $\mu_k$ をコントロールしようとするものである。Crabill [1], Lippman [7] は総期待割引コストを最小化する問題について、SMDP (Semi-Markov Decision Process) を用いて定式化しその最適政策について調べている。

本稿では、サーバーが劣化し故障する時、行列の長さ $i$ とサーバーの劣化状態または運転時間 (age) を観測しながら、サーバーのオーバーホールまたは運転続行の決定を行なうことを考える。この時、サーバーの状態のとりえ方とその観測時点のとり方によって次の2つのモデルが考えられる。

	イ) 離散型モデル	ロ) 連続型モデル
	定まった時点で状態を観測し行動の選択を行う。	M/M/1 型待ち行列系で随時状態を観測し行動の選択を行う。
サーバーの状態	運転時間 (age) を観測する。 ある寿命分布に従って故障が発生する。	劣化状態を観測する。 セミマルコフ的に劣化が推移する。
オーバーホールの時間の分布	幾何分布	指数分布

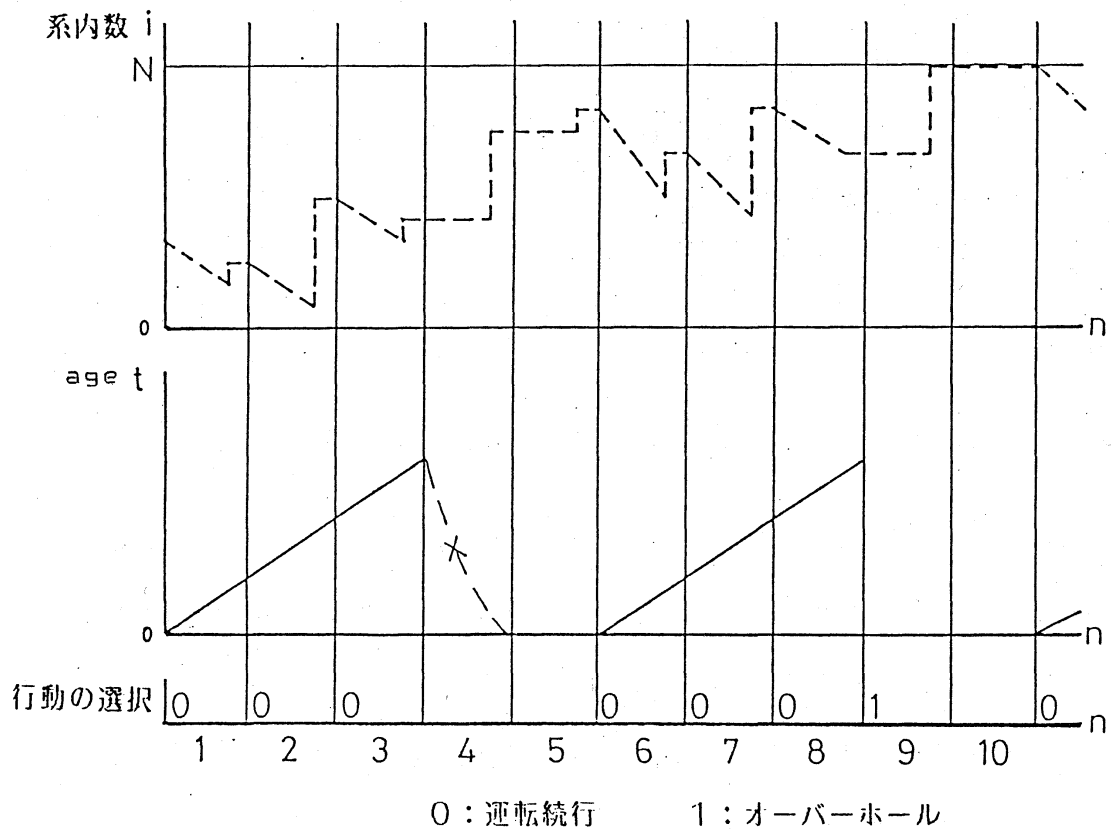
イ)、ロ) の2つのモデルについて、総期待割引コストを最小化することを目的として、それぞれ MDP、SMDPを用いて定式化を行なった。その結果、最適政策について類似の性質をもつことがわかった。ここでは、受注生産型工場において加工する機械(サーバー)がある程度頻繁に故障する場合を想定してモデル化したイ)の離散型について紹介する。

## 2 モデル化と定式化

次のような受注生産型工場を考える。この工場では、每期ある分布に従って仕事が依頼され、その受付整理は期末に行ない、バッファの容量を超えない限り受付けるものとする。加工機械(以後サーバーと呼ぶ)はある分布に従って故障する。この時、各期の始めに系内数  $i$  とサーバーのオーバーホール後運転継続期間 (age)

を調べて、オーバーホールか運転続行かを定める。オーバーホールには幾何分布に従う期間数を要し、そのサーバーは再生し運転が再開される。図1はこのシステムの状態の推移の例を示している。

図 1 状態の推移の例



このシステムの運営において次のような費用が考慮される。まず、各仕事の待ちに関する費用である。これは各期での系内数 $i$ を1期保管する費用として扱う。サーバーの稼働費用およびオーバーホールの費用は $age$ によって異なるものとする。故障の発生した場合はペナルティを追加する。またバッファ容量に達したために受け付けられなかった仕事についての機会損失も考慮する。これらの費用

に関して総期待割引コストを最小にする方策を求めたい。ところで、このモデルにおいて、初めに受け付けられた仕事は伝票の形をとるが、これに対してバッファ容量の制約を考えるのは、少し妙である。これは、それ以上増やすとある納期を超えてしまうという判断からくるバッファ容量への制約と考える。また、ここでは、バッファ容量をオーバーフローした仕事への機会損失費を考えたが、一般にこのような費用は算出しにくい。その場合、実際にサービスした仕事から得た利益を考えて、総利益を最大化する方策を考えてもよい。これについても実際に定式化を行なって最適方策の性質を調べたが、コスト最小化問題と同様な性質をもつので、以下では上のコスト最小化の問題について論ずる。

### 記号と定義

状態  $(i, t)$       $i$ ; 系内数    ( $i=0, 1, 2, \dots, N$ )  
                    $t$ ; age        ( $t=0, 1, 2, \dots; DO$ )  
                    $N$ ; buffer の容量     $DO$ ; オーバーホール の状態

行動  $a(i, t)$     状態  $(i, t)$  において選択する行動を示す

$$a(i, t) = \begin{cases} 0: \text{運転続行} \\ 1: \text{オーバーホール} \end{cases}$$

$\{a(k); k=0, 1, 2, \dots\}$ : 各期の到着個数の分布

$\{b(k); k=0, 1, 2, \dots\}$ : 各期のサービス可能個数の分布

ただし、サーバーが故障した場合はその期に行なったサービスはやり直すものとする。

$q_t$ : age  $t$  のサーバーの故障確率

$$q_t = P\{\text{age } t \text{ で故障} \mid \text{age } t-1 \text{ まで故障しない}\}$$

オーバーホールの期間の分布: 平均  $\frac{1}{\beta}$  の幾何分布

コスト

$H(i)$ : 行列長  $i$  の行列を保管するのに要するコスト/期

$O(t)$ : age  $t$  のサーバーの稼働コスト/期

$R(t)$ : age  $t$  のサーバーのオーバーホールコスト

$R(D)$ : 故障が発生したときの故障による

ペナルティとオーバーホールコストの和

$P$ : 断った仕事 1 個あたりの機会損失

次にこの問題を マルコフ 決定過程(MDP)により定式化する。まず準備として、各期首の状態確率及び各状態での期待コストを求める。

いま、 $P_{i,t+1|j,s}^a$  で、状態  $(i, t)$  において行動  $a$  を選択した時、次の期首で状態  $(i, t)$  に推移する確率を表す。これは次のように与えられる。

$a = 0$  (運転続行)の時

$$P_{i,t+1|j,s}^0 = \begin{cases} (1 - \alpha_t) P_{ij} & : s = t+1 \\ \alpha_t a_{ij} & : s = DO \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

$a = 1$  (オーバーホール)の時

$$P_{i,t+1|j,s}^1 = \begin{cases} \beta a_{ij} & : s = 0 \\ (1 - \beta) a_{ij} & : s = DO \end{cases}$$

ここで

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^N b_{ik} a_{kj}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a(j-i) & : i \leq j \leq N-1 \\ \sum_{j \geq N} a(j-i) & : j = N \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} b(i-j) & : 1 \leq j \leq i \\ \sum_{j \leq 0} b(i-j) & : j = 0 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

である。

次に1期間の期待機会損失を計算する。

$g^0(i)$ : 行列の長さ*i*で運転続行を選択し故障がなかった時

の期待機会損失コスト

$g^1(i)$ : 行列の長さ*i*で故障またはオーバーホールした時の

期待機会損失コスト

$G^0(i, t)$ : 状態(*i, t*)で運転続行の選択をした時の期待機会損失コスト

$G^1(i, DO)$ : 状態(*i, t*)でオーバーホールの選択をした時の

期待機会損失コスト

とおくと、これは次のように求められる。

$$g^0(i) = \sum_{k \geq N} \sum_{j=0}^N b_{ij} a(k-j)(k-N)P$$

$$g^1(i) = \sum_{k \geq N} a(k-i)(k-N)P$$

$$G^0(i, t) = q_+ g^1(i) + (1-q_+) g^0(i) \quad (a = 0)$$

$$G^1(i, DO) = g^1(i) \quad (a = 1)$$

ここで、 $V_\alpha(i, t)$ を状態(*i, t*)から出発し、最適方策を用いた時の総期待割

引コスト、 $f_\alpha^a(i, t)$ を状態(*i, t*)から出発し、1期目の行動を*a*、2期目以後

については最適方策を用いた時の総期待割引コストとする。 $\alpha$  は割引率を表わす  
このとき、次の関数方程式が得られる(Ross[9])。

### 関数方程式

$$(1) \begin{cases} \textcircled{1} t \neq DO \text{ の時 } (t \geq 0) \\ V_{\alpha}(i, t) = \min[f_{\alpha}^0(i, t), f_{\alpha}^1(i, t)] \\ \textcircled{2} t = DO \text{ の時} \\ V_{\alpha}(i, t) = H(i) + G^1(i, DO) + \alpha Y_{\alpha}(i, 0) \end{cases}$$

ここで

$$f_{\alpha}^0(i, t) = H(i) + O(t) + G^0(i, t) + q_t R(D) + \alpha X_{\alpha}(i, t)$$

$$f_{\alpha}^1(i, t) = H(i) + R(t) + G^1(i, DO) + \alpha Y_{\alpha}(i, 0)$$

$$X_{\alpha}(i, t) = (1 - q_t) \sum_{j=0}^N P_{ij} V_{\alpha}(j, t+1) + q_t \sum_{j=0}^N a_{ij} V_{\alpha}(j, DO)$$

$$Y_{\alpha}(i, 0) = \beta \sum_{j=0}^N a_{ij} V_{\alpha}(j, 0) + (1 - \beta) \sum_{j=0}^N a_{ij} V_{\alpha}(j, DO)$$

この関数方程式は逐次近似法、政策改良法など再帰式を繰り返し計算することによって、数値的に解くことができ、最適総期待割引コストが得られる。次節では

$$(2) a^*(i, t) = \{a | f_{\alpha}^a(i, t) = \min[f_{\alpha}^0(i, t), f_{\alpha}^1(i, t)]\}$$

で定まる最適方策の性質を調べる。

### 3 最適方策の性質

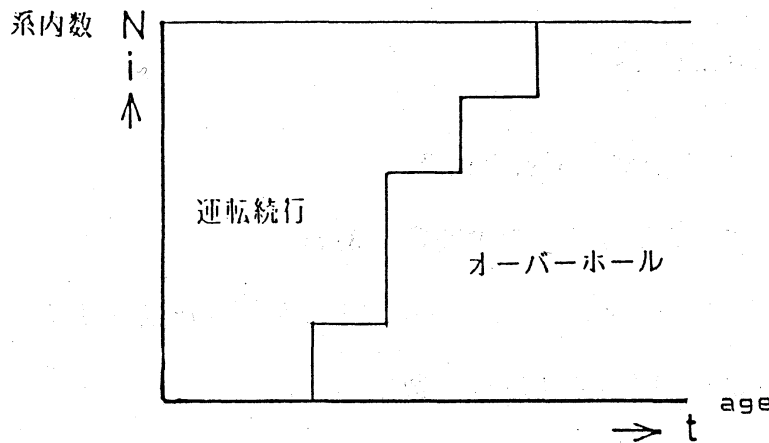
#### コントロール・リミット・ポリシー (CLP)

本節では最適方策がコスト・推移確率に関する自然な仮定のもとで、agent に関してはコントロール・リミット・ポリシー (CLP) と呼ばれる簡単な方策



となることを示す。つまり、ここでいうCLPとは図2に示すように、系内数 $i$ を固定するとある $age$ までは常に運転続行の選択をし、それを過ぎると常にオーバーホールの選択をするという方策である。最適方策がCLPとなることは、まず $n$ 期までの最適方策がCLPとなることを示し、 $n$ を大きくするとこれが無期限の最適方策に収束するということによって示される。

図 2 コントロールリミットポリシー



まず、 $V_n(i, t)$  を状態 $(i, t)$ から出発し $n$ 期間だけ運用したときの総期待割引コストの最小値とし、 $f_n^a(i, t)$  を状態 $(i, t)$ から出発し1期目の行動を $a$ 、残りの $n-1$ 期は最適方策を用いた時の総期待割引コストとする。この時、(1)式と同様に次の再帰式が得られる。

### 再帰式

$$(3) \begin{cases} \text{① } t \neq DO \text{ の時 } (t \geq 0) \\ V_n(i, t) = \min[f_n^o(i, t), f_n^i(i, t)] \\ \text{② } t = DO \text{ の時} \\ V_n(i, t) = H(i) + G^i(i, DO) + \alpha V_n(i, 0) \end{cases}$$

ここで

$$f_n^0(i, t) = H(i) + O(t) + G^0(i, t) + q_+ R(D) + \alpha X_n(i, t)$$

$$f_n^1(i, t) = H(i) + R(t) + G^1(i, D0) + \alpha Y_n(i, 0)$$

$$X_n(i, t) = (1 - q_+) \sum_{j=0}^N P_{ij} V_{n-1}(j, t+1) + q_+ \sum_{j=0}^N a_{ij} V_{n-1}(j, D0)$$

$$Y_n(i, 0) = \beta \sum_{j=0}^N a_{ij} V_{n-1}(j, 0) + (1 - \beta) \sum_{j=0}^N a_{ij} V_{n-1}(j, D0)$$

ここで次のことを仮定する。

#### 仮定 A (コストについて)

- i)  $H(i)$  は  $i$  に関して非減少関数である。
- ii)  $O(t), R(t)$  は  $t$  に関して非減少関数である。
- iii) 任意の  $i$  に対して、 $O(t) \leq R(t), R(t) \leq R(D)$  が成立する。
- iv)  $O(t) - R(t)$  は  $t$  に関して非減少関数である。

#### 仮定 B (故障確率について)

- v)  $q_+$  は  $t$  に非減少関数である。(つまり IFR である。)

これらの仮定の中で iv) を除いて他は自然なものといえる。iv) は age が増すにつれて、そのオーバーホールコストの増え方よりもサーバーの稼働コストの方が重んでくることを意味する。

以下に、最終的な結果を導く過程を簡単に紹介する。証明はページ数のこともあり、通常のやり方なので省略させていただく。

補題 1

イ) 任意の  $k$  に対して、 $\sum_{j=k}^N a_{jk}$ ,  $\sum_{j=k}^N b_{jk}$ ,  $\sum_{j=k}^N p_{jk}$  は  $i$  に関して非減少関数である。

ロ) 任意の  $i, k$  に対して  $\sum_{k=i}^N b_{ik} \leq \sum_{k=i}^N a_{ik}$  が成立する。

ハ)  $G^0(i, t), G^1(i, D_0)$  は  $i$  に関して非減少関数である。

ニ)  $G^0(i, t)$  は  $t$  に関して非減少関数である。

ホ) 任意の  $t$  に対して  $G^0(i, t) \leq G^1(i, D_0)$  が成立する。

これらの性質を利用すると、(3) 式の再帰式から  $V_n(i, t)$  に関して次の結果が導かれる。

補題 2

仮定 i), ii), iii), v) が満たされるのならば、任意の  $n$  に対して、 $V_n(i, t)$  は  $i$ 、及び  $t$  に関して非減少関数となる。

さらに、仮定 iv), v) と補題 2 より、(3) 式の再帰式を用いて

$$\begin{aligned} f_n^0(i, t) - f_n^1(i, t) &= O(t) - R(t) + G^0(i, t) - G^1(i, D_0) + q_t R(D) \\ &\quad + X_n(i, t) - Y_n(i, 0) \end{aligned}$$

が任意の  $n, i$  に対して  $t$  に関して非減少関数であることを示すことができる。また  $V_n(i, t)$  の極値が  $V_n(i, t)$  である (Ross [9]) ことから次の定理が成立する。

定理 3

仮定 A, B の下で (2) 式を満たす最適方策は CLP となる。

同様にして、最適方策は  $age$   $t$  を固定したときに系内数  $i$  に関しても CLP となることが考えられるが、きわめて不自然な条件をつけないと証明できない。実際、数値例でみるとおり、最適方策は複雑な形となり、機会損失、行列の保管費用、故障分布などの値により微妙に変わる。図3に見るように、多くの場合、最適方策は  $(t, i)$  面上で逆C型（つまりO型）となる。これは系内数  $i$  が容量  $N$  に近いところでは、保管費用が  $H(N)$  と頭打ちとなり、機会損失と故障によるペナルティとのバランスから、故障をさけてオーバーホールを選択しやすくなることを意味する。ただし、図4のように機会損失費  $P$  をかなり大きくすると、運転を続行して機会損失の増大を防ぐ傾向が現われる。これらの傾向は到着や処理能力、故障分布のパターンを単純にするなどいろいろ変えてみても同じであった。

また、 $N = \infty$  のときには機会損失がないことから  $i$  に関しても CLP となることが予想されるが、ある程度自然な仮定の下では証明することができなかった。

数値例1, 2は逐次近似法により計算を行なったものである。

さて、最後にここで提案した系内数  $i$  を考慮してオーバーホールを考えるコントロール方式（タイプ2）と、従来のサーバーの  $age$  だけを考慮してオーバーホールをする方式（タイプ1）と比べてみた（図5参照）。条件を変えていくつかの（約50例）数値計算例から次のことがいえよう。

数値例（機会損失費以外は共通のデータである）

$$P = \begin{cases} 0 & \text{数値例 1} \\ 100 & \text{数値例 2} \end{cases} \quad R(D) = 990$$

$$N = 20 \quad \beta = 0.5 \quad \alpha = 0.9$$

$$a(k) = \begin{cases} 0.50 & k = 11 \\ 0.25 & k = 10, 12 \\ 0.00 & \text{その他} \end{cases}$$

$$b(k) = \begin{cases} 1.00 & k = 11 \\ 0.00 & \text{その他} \end{cases}$$

t	a <sub>t</sub>	O(t)	R(t)
0	0.00	100	300
1	0.00	110	320
2	0.10	120	340
3	0.15	130	360
4	0.20	140	380
5	0.23	150	400
6	0.30	160	420
7	0.35	170	440
8	0.40	180	460
9	0.50	190	480
10	0.60	200	500

i	H(i)	i	H(i)
0	0	11	110
1	10	12	120
2	20	13	130
3	30	14	140
4	40	15	150
5	50	16	160
6	60	17	170
7	70	18	180
8	80	19	190
9	90	20	200
10	100		

図 3（数値例 1）

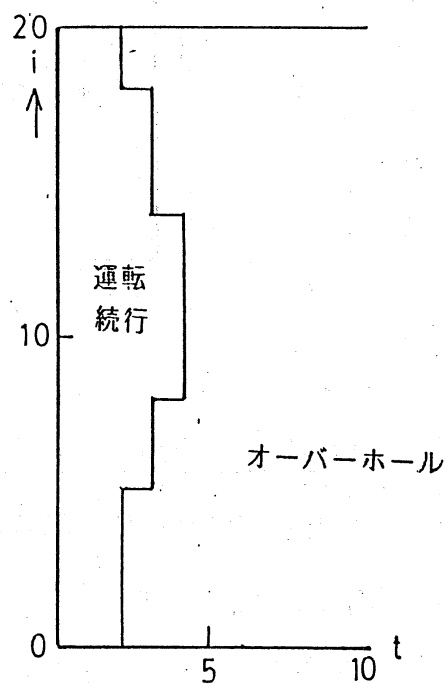


図 4（数値例 2）

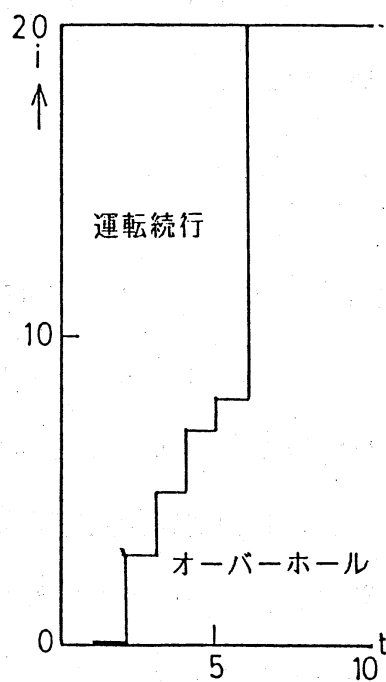
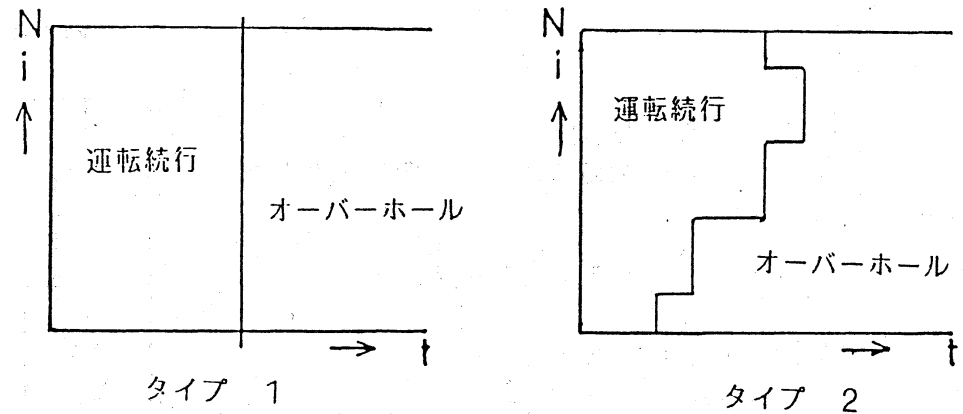


図 5 コントロールの方式



- a)  $H(i)$ ,  $P$ が $O(t)$ ,  $R(t)$ に比べて小さいときには,  $a^*(i, t)$ はタイプ1と類似の形となり、総費用の差も小さくコントロールの方式はタイプ1で十分である。
- b)  $H(i)$ ,  $P$ が $O(t)$ ,  $R(t)$ に比べて大きいときには,  $a^*(i, t)$ はタイプ1と大きく異なり、かなり総コストも改善されるので、タイプ2を採用する方がよい。

#### 4 おわりに

受注型生産工場において加工する機械（サーバー）が劣化する場合を想定し、新しい保全方式を提案した。ただし、ここで提案した方式は、仕事の到着間隔とサーバーの寿命がある程度 comparable でないと意味をもたない。

また、ロ)の連続型モデルについてもM/M/1型の系でサーバーがMarkov的に劣化し、修理時間が指数分布に従う場合にUnifomization(Kielson [5])を用いることによって、イ)の離散型モデルと同様の取り扱いができたことを報告しておく。

## 参 考 文 献

- [1] Crabill, T.B., "Optimal Control of a Maintenance System with Variable Rates," Opns. Res. 22, 736-745, 1974.
- [2] Derman, C., :Finite State Markovian Decision Process, ACADEMIC PRESS, 1970.
- [3] Derman, C., "On Optimal Replacement Rules when Changes of State are Markovian," Mathematical Optimization Technique(ed.R.Bellman) University of California Press,Berkeley, 201-210, 1963.
- [4] Kao, E., "Optimal Replacement Rules when Changes of State are Semi-Markovian," JORSA, 21, 1231-1249, 1973.
- [5] Kielson, J., :Markov Chain Models---Rarity and Exponentiality, Springer-Verlag, 1979.
- [6] Hatoyama, Y., "On Optimal Policies for Multi-Repair-Type Markov Maintenance Models," JORSJ, 22, 106-122, 1979.
- [7] Lippman, S.A., "Applying a New Device in the Optimization of Exponential Queueing Systems," Opns. Res. 23, 687-710, 1975.
- [8] Lippman, S.A., "Semi-Markov Decision Process with Unbounded Rewards," Mgt. Sci. 19, 717-731, 1973.
- [9] Ross, S.M., :Applied Probability Models with Optimization Application, HOLDEN-DAY, 1970.